Numrat e thjeshtë - Ushtrime

1. Tregoni se çdo numër i thjeshtë tek paraqitet në trajtën $4q\pm1$. A është i vërtetë pohimi i anasjellë?
Udhëzim Merrni në shqyrtim trajtat $4k+r$. Pohimi i anasjellë nuk është i vërtetë.

2. Tregoni se çdo numër i thjeshtë i ndryshëm nga ±2 ose ±3, paraqitet në trajtën $6q\pm1$. A është i vërtetë pohimi i anasjellë?

3. Tregoni se çdo numër natyror n i thjeshtë i trajtës $3k+1$, ku $k\in N$ është i trajtës $6m+1$.
Zgjidhje
Meqë n është numër natyror i thjeshtë dhe i ndryshëm nga 2 ai nuk plotpjesëtohet me 2. Pra është tek prandaj $n=2\cdot l+1$ nga ku $n-1:2$. Mirëpo nga $n=3k+1$ kemi $n-1:3$ prandaj $n-1:6$ ose $n=6m+1$.

4. Gjeni të gjithë numrat e plotë n të tillë që vlera absolute e shprehjes $n^2-7n+10$ të jetë numër i thjeshtë.
Zgjidhje
$n^2-7n+10=(n-2)(n-5)$ Që të jetë $|(n-2)(n-5)|$ numër i thjeshtë duhet që njëri faktor të jetë 1 dhe tjetri numër i thjeshtë. Pra $|n-2|=1$ ose $|n-5|=1$
Nëse $|n-2|=1$ atëherë n=1 ose n=3. Për n=1 kemi $|(n-2)(n-5)|=4$ pra del numër i përbërë, pra ky rast përjashtohet. Nëse n=3 kemi $|(n-2)(n-5)|=2$, pra kemi numër të thjeshtë.
Njëlloj veprojmë edhe për $|n-5|=1$ nga ku n=4 ose n=6. Për n=4 kemi $|(n-2)(n-5)|=2$ pra numër i thjeshtë dhe për n=6 kemi $|(n-2)(n-5)|=4$ numër i përbërë. Pra vera absolute e numrit $n^2-7n+10$ është numër i thjeshtë për n=3 ose n=4.

5. Gjeni të gjithë numrat natyror të thjeshtë të trajtës n^3-1
Zgjidhje
$n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$. Meqë n^2+n+1 është numër më i madh se 1 që n^3-1 të jetë i thjeshtë duhet që $n-1=1$ pra n=2, nga ku $n^3-1=7$. Pra 7 është i vetmi numër i thjeshtë i trajtës n^3-1.

6. A mund të jetë shuma e tre numrave të plotë të njëpasnjëshëm numër i thjeshtë? Po shuma e katër numrave të njëpasnjëshëm?
[a)Vetëm për numrat 0,1,2 b) jo]

7. Gjeni të gjithë numrat natyrorë n për të cilin të tre 3n-4 numrat ;4n-5 dhe 5n-3 janë të thjeshtë

Zgjidhje
Vërejmë që $3n-4+4n-5+5n-3=12n-12$ është numër i përbërë prandaj një ri prej tyre duhet të jetë çift. Meqë ne duam që të tre numrat të jenë të thjeshtë , atëherë njëri numër duhet të jetë 2. Numrat që mund të jenë 2 janë 3n-4 dhe 5n-3. Prej këtej kemi n=2 dhe n=1. Pë r n=1 kemi që numrat 3n-4 dhe 4n-5 nuk janë natyrorë . Për n=2 kemi 3n-2=2; 4n-5=3 dhe 5n-3=7.

8. Gjeni numrat e thjeshtë p dhe q në se ekuacioni $x^2-px+q=0$ ka dy rrënjë natyrore të ndryshme
Zgjidhje
Në se x_1 dhe x_2 janë rrë një të ekuacionit $x^2-px+q=0$, atë herë kemi që $x_1+x_2=p$ dhe $x_1 \cdot x_2=q$. Meqë q duhet të jetë i thjeshtë atë herë $x_1=1$ nga ku $q=x_2$ dhe $p=x_2+1$. Pra p dhe q duhet të jenë numra te thjeshtë të një pasnjë m, kështu që $q=2$ dhe $p=3$.

9. Tregoni se për $n \in N$ numrat e mëposhtëm janë të përbërë
9.1. n^4+n^2+1 për $n>1$ 9.2. $2^{4n+2}+1$ 9.3. n^5+n^4+1 për $n>1$

Udhëzim
9.1. $n^4+n^2+1=(n^2+1)^2-n^2$ 9.2. $2^{4n+2}+1=(2^{2n+1}+1)^2-2^{2n+2}$

9.3. $n^5+n^4+1= n^5+n^4+n^3-n^3-n^2-n+n^2+n+1=(n^2+n+1)(n^3-n^2+1)$

10. Të gjenden numrat e plotë $a \neq 3$ të tillë që $a^3-3:a-3$
Udhëzim $a^3-3=a^3-27+24=(a-3)(a^2+3a+9)+24:(a-3)$ prej nga $24:(a-3)$

11. Të gjendet $a \in N$ i tillë që pjesëtimi i 624 dhe 301 me a ka të njëjtën mbetje, 16.
Zgjidhje
$624=x \cdot a+16$ dhe $301=y \cdot a+16$ nga ku $323=a(x-y)$ ose $19 \cdot 17=(x-y) \cdot a$. Meqë 19 dhe 17 janë numra të thjeshtë atëherë $a=19$ ose $a=17$.
Duke pjesëtuar 624 me 17 gjejmë mbetje 12, pra nuk kemi numrin e kërkuar.
Duke pjesëtuar 624 me 19 gjejmë mbetje 16,po kështu duke pjesëtuar 301 me 19 kemi mbetje 16.
Atëherë numri është 19.

12. Tregoni se nëse a dhe a+2 janë numra të thjeshtë ku $a>3$, atëherë shuma e tyre plotpjesëtohet me 12
Zgjidhje
Meqë a është numër i thjeshtë atëherë $a=4k+1$ dhe atëherë $a+2=4k+3$, prandaj $a+a+2=8k+4:4$ ose $a=4k-1$ dhe atëherë $a+2=4k+1$, prandaj $a+a+2=8k:4$
Nga ana tjetër meqë a është i thjeshtë ai është i trajtës $3k+1$ ose i trajtës $3k+2$.
Mirëpo a nuk mund të jetë i formës $3k+1$ pasi $a+2=3k+3=3(k+1)$ kështu që a+2 nuk do të dilte i thjeshtë. Pra mbetet që a të jetë vetëm i trajtës $3k+2$. Në këtë rast $a+a+2=6k+6:3$.
Pra gjetëm që $a+a+2:3$ dhe $a+a+2:4$ prej këtej $a+a+2:12$.

13. Tregoni se mbetja e pjesëtimit të katrorit të një numri të thjeshtë $p>3$ me 24 është 1.
Zgjidhje
Nga ushtrimi 2 kemi që një numër i thjeshtë është i trajtës $p= 6q \pm 1$.
$P^2=36q^2 \pm 12q+1=12q(3q \pm 1)+1=12 \cdot 2m+1=24m+1$
Kemi përdorur barazimin $q(3q \pm 1)=2m$ ose që $q(3q \pm 1)$ është numër çift, gjë që mund të provohet lehtë.

14. Tregoni se nëse a,b janë numra të thjeshtë më të mëdhenj se 3, atëherë $(a^2-b^2):24$
Udhëzim Kjo gjë rrjedh nga ushtrimi 13.

15. Të tregohet se nëse m,n janë numra natyrorë, atëherë $(2^{mn}-1):(2^n-1)$ dhe prej këtej nxirrni që nëse 2^n-1 është numër i thjeshtë, atëherë n është numër i thjeshtë.

<u>Zgjidhje</u>

Dimë që $(a^k-b^k):(a-b)$, $\{a^k-b^k=(a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\cdots+ab^{k-2}+b^{k-1})\}$,prandaj $2^{mn}-1=(2^n)^m-1:(2^n-1)$

Tani do të provojmë se nëse 2^n-1 është numër i thjeshtë, atëherë edhe n është i thjeshtë.

Supozojmë të kundërtën nëse n do të jetë i përbërë atëherë $n=k\cdot l$ nga ku $2^{kl}-1$ nga sa thamë më sipër do të pjesëtohet me 2^k-1, pra 2^n-1del numër i përbërë, që është në kundërshtim me të dhënën.

16. Tregoni që për n>1:

a) 2^n paraqitet si shumë e dy numrave tek te njëpasnjëshëm

b) 3^n paraqitet si shumë e tre numrave tek te njëpasnjëshëm

<u>Zgjidhje</u>

$2^n=(2^{n-1}+1)+(2^{n-1}-1)$

$3^n=(3^{n-1}-2)+3^{n-1}+(3^{n-1}+2)$

17. Nëse k është numër çift, a është e mundur që numri 1 të jetë i barabartë me shumën e k numrave të anasjellë të numrave tek?

Pergjigje Jo. Shih barazimin $1=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots\ldots\frac{1}{p_k}\Leftrightarrow p_1p_2\ldots p_k=s_1+s_2+\ldots+s_k$ ku $s_i=p_1p_2\ldots p_{i-1}p_{i+1}\ldots p_k$

18. Të tregohet që

a) pjesëtuesi natyror më i vogël i ndryshëm nga 1 i një numri të plotë a>1 është i thjeshtë

b) pjesëtuesi natyror më i vogël i ndryshëm nga 1 një numri të plotë të përbërë a>1 është më i vogël ose i barabartë me $\sqrt{a}$

<u>Zgjidhje</u>

a) Nëse a është i thjeshtë pohimi është i vërtetë. Nëse a është i përbërë atëherë ekziston të paktën një pjesëtues. Le të jetë p pjesëtuesi më i vogël i numrit a>1, pra $a=p\cdot k$. Nëse ky pjesëtues do të jetë i përbërë, atëherë p=mn ku $2\leq m<p$. Meqë a:p dhe p:m do të kemi a:m, pra gjetëm një pjesëtues më të vogël se më i vogli.

b) Nga a thamë se pjesëtuesi më i vogël i a është një numër i thjeshtë. Le të jetë p ky pjesëtues: a=pk. Meqë p është më i vogli atëherë $p\leq k$. Nëse $p>\sqrt{a}$, atëherë edhe $k>\sqrt{a}$. Kështu do të kemi $a=pk>\sqrt{a}\sqrt{a}=a$, gjë që nuk ka mundësi.

19. Le të jenë a,b dhe c tre numra natyrorë të tillë që a dhe b nuk kanë asnjë pjesëtues të përbashkët dhe $c^n=ab$ ku $n\in N$. Tregoni që ekzistojnë $d,e\in N$ të tillë që $d^n=a$ dhe $e^n=b$

Zgjidhje

c nuk mund të jetë një numër i thjeshtë.

Vërtetë nëse c i thjeshtë atëherë nga $c^n=ab$ kemi c^n:a dhe c^n:b.

Meqë c^n:a dhe c i thjeshtë atëherë $a=c^{n-k}$ ku $k>0$ dhe $b=c^k$, pra a:c dhe b:c.

Kjo bie në kundërshtim me të dhënën që a dhe b nuk kanë pjesëtues të përbashkët.

Pra c nuk mund të jetë i thjeshtë, c= $p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{x_k}$ Atëherë $c^n=\left(p_1^{x_1}\right)^n\cdot\left(p_2^{x_2}\right)^n\cdot\ldots\cdot\left(p_k^{x_k}\right)^n=ab$

Meqë a dhe b nuk kanë asnjë pjesëtues të përbashkët, atëherë asnjë nga këta faktorë nuk mund të jenë njëkohësisht faktorë të a dhe të b. Prandaj a dhe b do të kenë secili faktorë fuqi të n.

Kjo do të thotë që a= $\left(p_1^{x_1}\right)^n\cdot\left(p_2^{x_2}\right)^n\cdot\ldots\cdot\left(p_s^{x_k}\right)^n$ dhe b= $(p_{s+1}{}^{\chi_{s+1}})^n\cdots(p_k{}^{\chi_k})^n$, ose $a=d^n$ dhe $b=e^n$.

20. Të tregohet se nëse p,b,k janë numra natyrorë dhe p është numër i thjeshtë atëherë

a) barazimi $p\cdot b=k^2$ sjell b:p

b) të kontrollohet se nëse prodhimi i dy numrave të thjeshtë të ndryshëm mund të jetë katror i plotë

Zgjidhje

a) Nëse $p\cdot b=k^2$ atëherë k^2:p dhe meqë p është i thjeshtë kemi k:p ose $k=p\cdot x$.

Nga $pb=k^2$ dhe $k=px$ kemi $pb=p^2x^2$ose $b=px^2$ ose b:p

b) Nëse $k^2=p\cdot q$ ku p dhe që janë numra të thjeshtë ku $p\neq q$, nga pohimi i parë do të kishim p:q që nuk mund të ndodhë pasi p dhe q janë numra të thjeshtë të ndryshëm.

21. Të gjenden të gjithë numrat e thjeshtë të trajtës $\frac{n(n+1)}{2}-1$ ku n është numër natyror

Zgjidhje

$\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ që duhet të jetë p, ku p është numër i thjeshtë, pra duhet që

$(n-1)(n+2)=2p$ kjo ndodh kur $n-1=1$ dhe $n+2=2p$, pra $n=2$ që nga $\frac{n(n+1)}{2}-1=2$.

ose $n-1=2$ dhe $n+2=p$ që nga $n=3$ dhe $\frac{n(n+1)}{2}-1=5$.

22. Të vërtetohet se për $n>2$, nëse njëri nga numrat 2^n-1, 2^n+1 është i thjeshtë, atëherë tjetri është i përbërë.

Zgjidhje

Meqë 2^n nuk plotëpjestohet me 3, atëherë gjatë pjesëtimit me 3 jep mbetjen 1 ose 2. Në se $2^n=3k+1$ atëherë $2^n-1=3k$ pra 2^n-1:3. Nëse $2^n=3k+2$ atëherë $2^n+1=3k+2+1=3(k+1)$ pra 2^n+1:3. Pra në të gjitha rastet një nga numrat $2^n-1,2^n+1$ pjesëtohet me 3. Nga kushti kemi që njëri nga këta numra është i thjeshtë, prandaj del se të dy këta numra nuk mund të jenë të thjeshtë për të njëjtin vlerë të n (pasi në rast të kundërt nuk do të plotpjesëtohej asnjeri prej tyre me 3)

23. Gjeni numrat e thjeshtë p,q dhe r të tillë që $\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1$

Zgjidhje

Nga $\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1$ mund të shkruajmë $\frac{pr+p-4q}{q(r+1)}=1$ ose pr+p-4q=qr+q ose pr-qr=5q-p.

Së pari p≠q pasi në rast të kundërt do kishim $\frac{4}{r+1}=0$ që nuk mund të ndodhë.

Meqë p≠q atëherë r= $\frac{5q-p}{p-q}=\frac{4q}{p-q}-1$. Është e qartë se p-q≠q,2q,4q meqë p është i thjeshtë.

Meqë r është numër natyror atëherë p-q=1 ose p-q=2 ose p-q=4

1) p-q=1 prej nga r=4q-1. Atëherë duhet që q,q+1 dhe 4q-1 të jenë të thjeshtë. Nëse q=2 atëherë p=q+1=3 dhe r=4q-1=7. Raste të tjera nuk ka pasi nëse q=2k ku k>1 atëherë q është i përbërë, nëse q=2k+1 atëherë p=2(k+1) dhe për k>0 del p i përbërë.

2) p-q=2 pej nga r=2q-1. Ne kërkojmë numrat e thjeshtë q,q+2 dhe 2q-1. Për q=2, q+2 del i përbërë. Për q=3 kemi p=5 dhe r=5. Pra kjo përbën një treshe tjetër që verteton barazimin e dhënë. Tani nëse q=3k+1 kemi p=q+2=3k+3=3(k+1) pra p i përbërë. Nëse q=3k+2 atëherë r=2q-1=2(3k+2)-1=6k+3 përsëri i përbërë. Pra në këtë rast mbetet treshja (3,5,5) si *zgjidhje* e ekuacionit të dhënë.

3) p-q=4 atëherë r=q-1, pra kërkojmë treshen q-1,q,q+4 që të jetë e thjeshtë.

Nëse q=2, atëherë r=1;q=2 dhe p=6 rast që nuk përmbush kushtet e ushtrimit.

Nëse q=3 kemi r=2; q=3 dhe p=7, rast që plotëson kushtet e ushtrimit.

Në këtë rast nuk ka treshe të tjera se nëse q=3k+1 del i përbërë r=q-1; nëse q=3k+2 del i përbërë p=q+4